2ème composition 1/2

option P'

Durée : 4 heures

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n (n = 1, 2, \cdots)$ muni de son produit scalaire usuel noté $(|)$; par $\mathrm{End}\, E$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E ; par $\mathrm{Ker}\, A$, $\mathrm{Im}\, A$ et A^* respectivement le noyau, le sous-espace image et l'adjoint d'un endomorphisme A ; par $F^\perp$ le sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E. On note AB la composée de deux applications A et B, et Ax l'image d'un élément x par A.

Première partie

On dit qu'un endomorphisme A de E est *positif* si l'on a $(Ax|x) \geq 0$ pour tout x de E.

1. Soit A un endomorphisme symétrique de E.

a) Donner un critère, portant sur les valeurs propres de A, pour que A soit positif.

b) Montrer que si A et B sont deux endomorphismes symétriques positifs tels que $B^2 = A$, A et B ont les mêmes sous-espaces propres.

c) En déduire que si A est un endomorphisme symétrique positif, il existe un unique endomorphisme symétrique positif B tel que $B^2 = A$. On le notera $A^{1/2}$.

2. Donner un exemple simple d'endomorphisme positif mais non symétrique.

3. Soit A un endomorphisme de E.

a) Vérifier que A^*A est symétrique et positif. Comparer son noyau et celui de A, son image et celle de A^*. On posera $|A| = (A^*A)^{1/2}$.

b) Déterminer $|kA|$, k étant un réel.

4. *Exemple* : déterminer $|A|$ lorsque $n = 3$ et lorsque A est représenté dans la base naturelle de E par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où α et β sont non nuls.

Deuxième partie

On dit qu'un endomorphisme U de E est *partiellement isométrique* si l'on a $\|Ux\| = \|x\|$ pour tout $x \in (\mathrm{Ker}\, U)^\perp$.

5. Soit U un endomorphisme partiellement isométrique de E.

a) Montrer que l'on a $(Ux|Uy) = (x|y)$ pour tous x et $y \in (\mathrm{Ker}\, U)^\perp$.

b) Comparer U^*U et le projecteur orthogonal sur le sous-espace $(\mathrm{Ker}\, U)^\perp$.

c) Montrer que U^* est partiellement isométrique et déterminer UU^*.

6. Soit U un endomorphisme de E ; montrer que si U^*U est un projecteur, U est partiellement isométrique.

7. Le produit de deux endomorphismes partiellement isométriques est-il toujours partiellement isométrique ?

8. Soit A un endomorphisme de E.

a) Construire un endomorphisme partiellement isométrique U vérifiant $|A| = UA$ et $(\text{Ker } U)^{\perp} = \text{Im } A$. Déterminer U^*UA.

b) Démontrer l'unicité de U.

9. Déterminer U dans le cas de l'exemple de la question **4.**.

Troisième partie

On note $Tr\,A$ la trace de A.

10. Soit T un endomorphisme tel que l'on ait $Tr(VT) \leq Tr\,T$ pour tout automorphisme orthogonal V.

a) Montrer que T est symétrique [on pourra examiner d'abord le cas où $n = 2$].

b) Montrer que T est positif.

11. Soit A un endomorphisme de E ; on note G l'ensemble des endomorphismes partiellement isométriques V vérifiant $V^*VA = A$.

Montrer que la fonction réelle f sur G définie par $f(V) = Tr(VA)$ est bornée, qu'elle atteint son maximum en au moins un élément V_0, et qu'on a alors $V_0A = |A|$.

12. On fixe un endomorphisme symétrique positif A et deux endomorphismes partiellement isométriques U et V.

a) Vérifier que l'on a $Tr(V^*AV) \leq Tr\,A$.

b) Démontrer que l'on a $Tr(UVA) \leq Tr\,A$.

On pourra démontrer que

$$Tr(UVA) = \sum_i (A^{1/2}e_i | A^{1/2}V^*U^*e_i)$$

où (e_i) est une base orthonormée de E, puis que

$$Tr(UVA) \leq (\sum_i \|A^{1/2}e_i\|^2)^{1/2} (\sum_i \|A^{1/2}V^*U^*e_i\|^2)^{1/2}$$

13. Construire sur $\text{End}\,E$ une norme N d'espace vectoriel telle que $N(A) = Tr\,A$ si A est symétrique et positif.